

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

Математика
7 класс
Задачи на движение

Новосибирск

Формула пути.

В задачах данной темы считается, что движение является *равномерным*. Это значит, что объекты движутся с постоянными скоростями. Скоростью называется расстояние, пройденное за единицу времени. Многие величины в математике имеют специальные обозначения. В частности, общепринято, что

путь обозначается буквой S ;

скорость – буквой V ;

время – буквой t .

$S = V \cdot t$ (расстояние равно скорости, умноженной на время).

Это равенство называется формулой пути. Оно устанавливает зависимость между тремя основными величинами, характерными для движения любого объекта.

Из формулы пути (по правилу нахождения неизвестного множителя) следует, что

$V = S : t$ (скорость равна расстоянию, деленному на время движения),

$t = S : V$ (время движения равно расстоянию, деленному на скорость).

Как правило, в задачах рассматривается движение по крайней мере двух объектов (может быть и более). Поэтому удобно ввести следующие условные обозначения, которые будут фигурировать и на схематических чертежах к задачам.

Условные обозначения

S – расстояние между пунктами, из которых начато движение объектов (пешеходов, автомобилей и т.д.).

S_1 – расстояние, пройденное первым объектом до встречи (или за определенное время).

V_1 – скорость движения первого объекта.

t_1 – время движения первого объекта.

S_2, V_2, t_2 – аналогичные характеристики для второго объекта.

$V_{сбл}$ – скорость сближения объектов.

$V_{уд}$ – скорость удаления объектов.

$t_{встр}$ – время, через которое произошла встреча объектов.

Способы решения задач на движение.

Известно, что одну и ту же задачу зачастую можно решить разными способами. Поэтому, решив задачу или составив план ее решения,

весьма полезно подумать, возможен ли другой способ решения. Вполне вероятно, что может найтись более рациональный способ. Естественно, лучше избрать его, как более простой и экономичный, т.е. быстрее приводящий к цели.

Задачи на движение можно решать с помощью двух способов – арифметического и алгебраического. Рассмотрим отдельно каждый из этих способов. Кроме этого, обратим внимание на то, что при решении каким-либо из этих двух способов необходимо подумать о выборе более рационального решения. Попутно рассмотрим возможные способы оформления решения задачи.

Арифметический способ.

Арифметический способ заключается в том, что задача решается отдельными арифметическими действиями. Значение неизвестной величины определяется через известные по условию задачи величины. При этом необходимо выяснить, какая из трех основных величин (пройденный путь, скорость, время) неизвестна, и с помощью какого арифметического действия можно определить эту неизвестную величину. Напомним, что за основу берется формула пройденного пути $S = V \cdot t$, откуда получаем еще две формулы:

$V = S : t$ - для определения скорости и

$t = S : V$ - для определения времени движения.

Обратим внимание на то, что существуют несколько способов оформления решения задач арифметическим способом:

- а) вопрос-действие;
- б) действие-пояснение;
- в) составление числового выражения и нахождение его значения;
- г) в виде содержательной схемы (этот способ применяется реже).

Проиллюстрируем это на решении следующей задачи.

Задача 1. Стоянка геологов находится на расстоянии 340 км от города. Чтобы добраться до стоянки, геологи сначала ехали из города 4 часа на машине со скоростью 75 км/ч, затем 3 часа ехали на лошадях со скоростью 8 км/ч, а после этого 4 часа шли пешком. С какой скоростью они шли пешком?

Решение.

Решим задачу арифметическим способом, используя все (четыре) способы оформления.

- а) «Вопрос-действие».

- 1) Сколько километров проехали геологи на машине?
 $75 \cdot 4 = 300$ (км).
- 2) Сколько километров они проехали на лошадях?
 $8 \cdot 3 = 24$ (км).
- 3) Сколько километров проехали геологи на машине и на лошадях вместе?
 $300 + 24 = 324$ (км).
- 4) Сколько километров они прошли пешком?
 $340 - 324 = 16$ (км).
- 5) С какой скоростью они шли пешком?
 $16 : 4 = 4$ (км/ч).

б) «Действие-пояснение».

- 1) $75 \cdot 4 = 300$ (км) – проехали на машине.
- 2) $8 \cdot 3 = 24$ (км) – проехали на лошадях.
- 3) $300 + 24 = 324$ (км) – проехали на машине и на лошадях вместе.
- 4) $340 - 324 = 16$ (км) – прошли пешком.
- 5) $16 : 4 = 4$ (км/ч) – с такой скоростью они шли пешком.

в) С помощью числового выражения.

$$(340 - (75 \cdot 4 + 8 \cdot 3)) : 4 = (340 - (300 + 24)) : 4 = 16 : 4 = 4 \text{ (км/ч)}.$$

г) В виде содержательной схемы (рис.1).

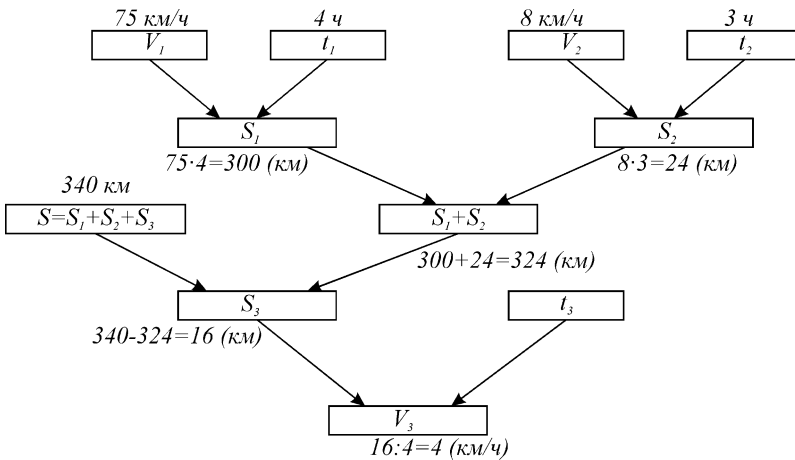


Рис.1

Ответ: 4 км/ч.

Алгебраический способ.

Решение задач алгебраическим способом осуществляется при помощи уравнений. Для того, чтобы решить задачу с помощью уравнения, надо сначала по условию задачи составить его. Для этого соотношения между величинами в задаче необходимо перевести на математический язык. Вот примерная схема (алгоритм) решения задачи алгебраическим способом:

1. Выбирают одну из неизвестных величин, входящих в условие задачи, и обозначают ее буквой x (можно другой латинской буквой). Обычно через x обозначают искомую величину, т.е. ту, которую требуется определить. Но иногда бывает удобнее обозначить через x какую-либо другую неизвестную величину, связанную с искомой величиной.
2. Все остальные неизвестные величины, входящие в условие задачи, выражают через x . При этом необходимо строго следить за тем, чтобы *все однородные величины были выражены в единицах одного наименования (приведены к одной единице измерения)*.
3. На основании данной в условии задачи зависимости между величинами составляют уравнение.
4. Решают составленное уравнение.
5. Далее необходимо проверить, удовлетворяет ли найденный корень условию задачи.
6. Запись ответа.

Решим следующие задачи алгебраическим способом. Рассмотрим в качестве образца следующую задачу.

Задача 2. Моторная лодка шла 2 часа по озеру и 3 часа по течению реки, скорость течения которой 2 км/ч. Всего моторная лодка прошла 66 км. Найдите ее собственную скорость.

Решение.

(по ходу решения выделим все пункты алгоритма алгебраического способа).

Анализ-рассуждение по условию задачи	Действия
1) Собственная скорость моторной лодки неизвестна.	1) Обозначим через x км/ч собственную скорость лодки.
2) По озеру лодка шла 2 часа.	2) $2 \cdot x$ км – столько

Применим формулу пройденного пути $S = V \cdot t$.

По течению реки лодка прошла 3 часа

$$V_{\text{по теч. р.}} = V_{\text{собств.}} + V_{\text{теч. р.}}$$

3) По условию задачи известно, что всего моторная лодка прошла 66 км, что позволяет нам составить уравнение.

4) Решаем уравнение.

5) Проверка (по действиям) согласно условию задачи.

километров прошла лодка по озеру.

$(x + 2)$ км/ч – скорость лодки по течению реки.

$3 \cdot (x + 2)$ км – таков пройденный лодкой путь по течению реки.

$$3) 2 \cdot x + 3 \cdot (x + 2) = 66$$

$$4) 2x + 3x + 6 = 66$$

$$5x = 66 - 6$$

$$5x = 60$$

$$x = 60 : 5$$

$x = 12$ (км/ч) – собственная скорость моторной лодки.

5)

1. $12 \cdot 2 = 24$ (км) – пройденный путь по озеру.

2. $12 + 2 = 14$ (км/ч) – скорость лодки по течению.

3. $14 \cdot 3 = 42$ (км) – пройденный путь по течению реки.

4. $24 + 42 = 66$ (км) – всего прошла моторная лодка.

Мы убедились, что результат проверки – 66 км - совпал с данной величиной по условию задачи. Делаем вывод, что задача решена верно (заметим, что проверку в задаче можно выполнять и другим способом).

6) Записываем ответ.

6) Ответ: 12 км/ч.

При решении более сложных задач, особенно алгебраическим способом (с помощью уравнения), применение табличного способа оформления анализа задачи очень полезно.

Приведем в качестве образца решение следующей задачи.

Задача 3. Из Саратова в Москву вышел пассажирский поезд со скоростью 55 км/ч, а через 2 ч вслед за ним отправился скорый поезд со скоростью 66 км/ч. На каком расстоянии от Москвы второй поезд догонит первый, если расстояние от Саратова до Москвы 855 км?

Решение. Выполним схематический чертеж (рис.2).

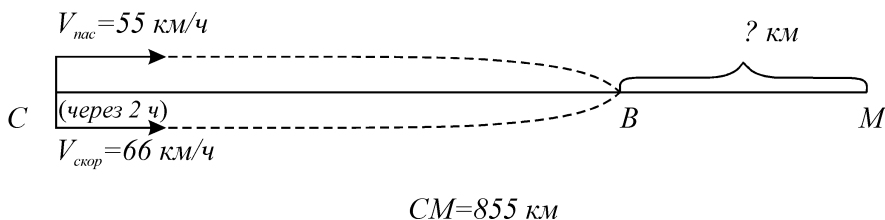


Рис. 2

Решим задачу с помощью уравнения, причем результаты анализа задачи постепенно будем вписывать в таблицу.

Анализ задачи	Запись в таблице
Обозначим через x ч время, за которое скорый поезд догонит пассажирский. Пассажирский поезд был в пути на 2 ч дольше, значит, его время в пути равно $(x + 2)$ ч.	$t_{\text{скор}} = x$ ч $t_{\text{пасс}} = (x + 2)$ ч
Знаем по условию задачи скорости поездов	$V_{\text{скор}} = 66$ км/ч $V_{\text{пасс}} = 55$ км/ч
По формуле пройденного пути $S = V \cdot t$ определим расстояния, пройденные поездами до встречи:	$S_{\text{скор}} = 66 \cdot x$ км $S_{\text{пасс}} = 55 \cdot (x + 2)$ км

Итак, таблица готова:

	Скорый поезд	Пассажирский поезд
S	$66 \cdot x$ км	$55 \cdot (x + 2)$ км
V	66 км/ч	55 км/ч
t	x ч	$(x + 2)$ ч

Очевидно (обратим внимание на схематический чертеж), что поезда прошли от Саратова до встречи одинаковые расстояния, поэтому можно составить уравнение: $66 \cdot x = 55 \cdot (x + 2)$.

Решим его.

$$66x = 55x + 110$$

$$66x - 55x = 110$$

$$11x = 110$$

$$x = 10.$$

Итак, через 10 ч после своего выхода скорый поезд догонит пассажирский.

Обратимся снова к чертежу.

По условию задачи расстояние $CM = 855$ км. Расстояние CB вычисляем: $CB = 66 \cdot 10 = 660$ (км). Теперь определим, на каком расстоянии от Москвы поезда встретились, т.е. найдем расстояние BM :

$$BM = CM - CB, \text{ т.е.}$$

$$BM = 855 - 660 = 195 \text{ (км).}$$

Ответ: 195 км.

Итак, на примере решения этой задачи мы убедились, что табличный способ вычленения условия и требования задачи укорачивает ход мыслей, а следовательно, ускоряет непосредственный анализ и решение задачи.

Иногда для решения задачи удобно составить не одну, а две таблицы (или объединить их в «многослойную» табличную форму). Это зависит от содержания самой задачи. Приведем пример.

Задача 4. Расстояние от реки до турбазы туристы рассчитывали пройти за 6 ч. Однако после 2 ч пути они уменьшили скорость на 1 км/ч и в результате опоздали на турбазу на 1 ч. С какой скоростью шли туристы первоначально?

Решение. Анализ задачи наглядно представляет следующая таблица:

	Намеченное движение	Фактическое движение	
		I участок пути	II участок пути
S	$6x$ км	$2x$ км	$5(x-1)$ км
V	x км/ч	x км/ч	$(x-1)$ км/ч
t	6 ч	2 ч	5 ч (опозд. на 1 ч)

Итак, согласно намеченному плану движения туристы должны преодолеть $6x$ км.

Фактически они прошли в сумме два участка: $(2x + 5(x-1))$ км.

Несмотря на опоздание во времени, они преодолели намеченный путь, поэтому можно составить уравнение:

$$2x + 5(x-1) = 6x$$

Решаем его.

$$2x + 5x - 5 = 6x$$

$$7x - 6x = 5$$

$x = 5$ (км/ч) – намеченная (планируемая) скорость туристов.

Проверка:

1. $6 \cdot 5 = 30$ (км) – расстояние от реки до турбазы.
2. $5 \cdot 2 = 10$ (км) – длина I участка пути.
3. $30 - 10 = 20$ (км) – длина II участка пути.
4. $5 - 1 = 4$ (км/ч) – скорость на II участке пути.
5. $20 : 4 = 5$ (ч) – время прохождения II участка пути.
6. $2 + 5 = 7$ (ч) – общее время в пути (фактическое).
7. $7 - 6 = 1$ (ч) – опоздание на 1 ч (действительно).

Вывод: задача решена верно.

Ответ: 5 км/ч.

Типы задач на движение

Встречное движение.

При решении задач на встречное движение существенной характеристикой является скорость сближения движущихся объектов. Расстояние, на которое сближаются движущиеся объекты за единицу времени, называют *скоростью сближения*.

При встречном движении скорость сближения равна сумме скоростей движущихся объектов, т.е. $V_{сбл} = V_1 + V_2$.

Расстояние между пунктами определяется по формуле $S = V_{сбл} \cdot t_{встр}$.

Рассмотрим решение задачи на встречное движение.

Задача 5. Расстояние между городами А и В 720 км. Из А в В вышел скорый поезд со скоростью 80 км/ч. Через 2 часа навстречу ему из В в А вышел пассажирский поезд со скоростью 60 км/ч. Через какое время они встретятся?

Решение. Выполним схематический чертеж к задаче (рис.3), причем удобно выделить на нем участок движения только скорого поезда в течение 2 часов (АС) и тот участок, где они двигались одновременно навстречу друг другу до встречи (ВС).

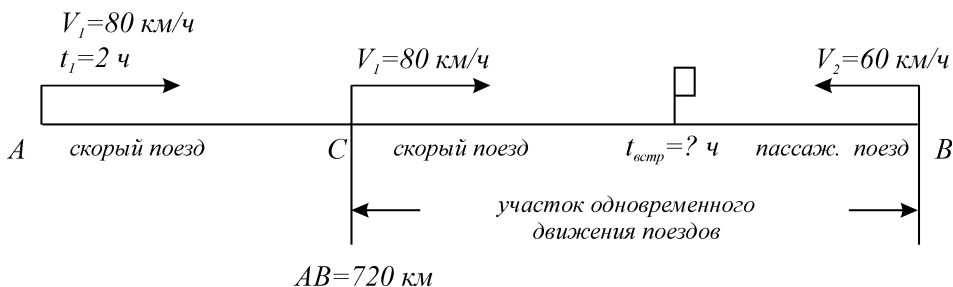


Рис. 3

Легко увидеть, что можно сразу определить расстояние АС – путь, который прошел скорый поезд, двигаясь один в течение двух часов.

1) $AC = 80 \cdot 2 = 160$ (км).

Зная АС и АВ, определим ВС – расстояние, где поезда одновременно двигались до встречи.

2) $BC = 720 - 160 = 560$ (км).

А теперь решаем простейшую задачу на встречное движение.

3) $80 + 60 = 140$ (км/ч) – скорость сближения поездов.

4) $560 : 140 = 4$ (ч) – время до встречи.

Заметим, что анализ задачи можно провести с помощью такой таблицы.

	Одновременное движение поездов		
	скорый поезд	скорый	пассажирский
S	?	?	?
V	80 км/ч	80 км/ч	60 км/ч
t	2 ч	$t_{встр}$	$t_{встр}$

Именно эта таблица подсказывает нам другой способ решения задачи – с помощью составления уравнения.

Обозначим $t_{встр} = x$ ч. Применив формулу пути $S = V \cdot t$ и используя факт, который легко видеть на рисунке, – $AC + BC = AB$, можно составить уравнение $80 \cdot 2 + 80x + 60x = 720$.

Решив его, получим, что $x = 4$.

Ответ: через 4 ч.

Противоположное движение.

При решении задач такого типа суммарная скорость имеет другое название. Расстояние, на которое удаляются движущиеся предметы за единицу времени, называют *скоростью удаления*.

При движении в противоположных направлениях скорость удаления равна сумме скоростей движущихся объектов, т.е. $V_{уд} = V_1 + V_2$.

Задача 6. В 8 ч с аэродрома вылетели одновременно в противоположных направлениях два самолета. В 11 ч расстояние между ними было 3540 км. Один из них летел со скоростью 620 км/ч. С какой скоростью летел другой самолет?

Решение.

I способ.

Выполним схематический чертеж к задаче (рис.4).

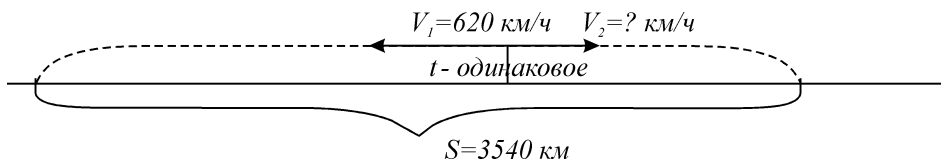


Рис. 4

Легко определить время, за которое самолеты вместе преодолели расстояние в 3540 км.

1) $11 - 8 = 3$ (ч).

Заполним вспомогательную таблицу.

	I самолет	II самолет	Дополнительное условие
S			$S_1 + S_2 = 3540$ км
V	620 км/ч	?	
t	3 ч	3 ч	

А теперь легко наметить план решения задачи и осуществить его:

1) Зная V_1 и t_1 , находим S_1 : $620 \cdot 3 = 1860$ (км).

2) по дополнительному условию определяем S_2 : $3540 - 1860 = 1680$ (км).

3) Зная S_2 и t_2 , находим V_2 : $1680 : 3 = 560$ (км/ч)

Задача достаточно легко решается и с помощью уравнения.

II способ.

Обозначим через x км/ч скорость второго самолета, тогда $(620 + x)$ км/ч – скорость удаления самолетов друг от друга. За 3 ч они удалятся на $(620 + x) \cdot 3$ км, что составляет 3540 км. Отсюда решаем уравнение: $(620 + x) \cdot 3 = 3540$.

$$620 + x = 1180,$$

$$x = 560.$$

Ответ: 560 км/ч.

Движение в одном направлении (вдогонку).

При движении в одном направлении (вдогонку) скорость сближения объектов равна разности их скоростей:

$$V_{\text{сбл}} = V_1 - V_2 \quad (V_1 > V_2).$$

Задача 7. *Сергея заметил идущий на остановку автобус в 180 м позади себя. Чтобы не опоздать, он побежал и через 12 с прибежал на остановку одновременно с автобусом. С какой скоростью пришлось бежать Сергею, если известно, что автобус движется со скоростью 19 м/с?*

Решение.

I способ.

1) $180 : 12 = 15$ (м/с) – скорость их сближения.

2) $19 - 15 = 4$ (м/с) – скорость, с которой бежал Сергей.

При выполнении второго действия применяем формулу

$$V_{\text{сближ}} = V_1 - V_2, \text{ откуда } V_2 = V_1 - V_{\text{сближ}}.$$

Краткая запись решения по I способу: $19 - (180 : 12) = 4$ (м/с).

Очевидно, что задачу можно было легко решить и с помощью уравнения, обозначив скорость Сережи через x м/с.

II способ.

$$(19 - x) \cdot 12 = 180.$$

Выполните самостоятельно решение задачи этим способом.

Приведем и арифметический способ решения задачи.

III способ.

1) $19 \cdot 12 = 228$ (м) – путь, пройденный автобусом до остановки.

2) $228 - 180 = 48$ (м) – путь, который преодолел Сережа.

3) $48 : 12 = 4$ (м/с) – скорость Сергея.

Ответ: 4 м/с.

Движение в одном направлении (с отставанием).

При движении в одном направлении (с отставанием) скорость удаления объектов равна разности их скоростей.

$$V_{уд} = V_1 - V_2 \quad (V_1 > V_2).$$

Задача 8. Собака гонится за лисой со скоростью 700 м/мин, а лиса убегает от нее со скоростью 850 м/мин. Сейчас между собакой и лисой 400 м. Каким станет расстояние между ними через 7 минут?

Решение. Выполним схематический чертеж (рис.5).

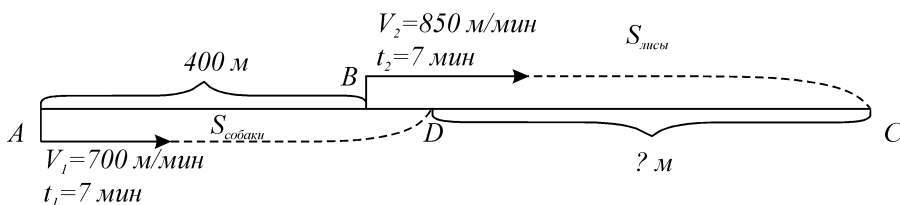


Рис. 5

I способ. Из чертежа видно, что выполняется равенство $AB + BC = AD + CD$, где:

$AB = 400$ м – это первоначальное расстояние между собакой и лисой.

BC – это расстояние, на которое убежала лиса за 7 минут.

AD – это расстояние, которое преодолела собака за 7 минут.

CD – это искомое расстояние, т.е. конечное расстояние между собакой и лисой (спустя 7 минут).

Значит, искомое расстояние можно определить так:

$$CD = (AB + BC) - AD \quad \text{или} \quad S = (400 + S_{\text{лисы}}) - S_{\text{собаки}}.$$

Итак, выполняем действия:

1) $700 \cdot 7 = 4900$ (м) – $S_{\text{собаки}}$.

2) $850 \cdot 7 = 5950$ (м) – $S_{\text{лисы}}$.

3) $(400 + 5950) - 4900 = 1450$ (м) – искомое расстояние S .

II способ. Если представить себе, что собака и лиса бросились бежать друг от друга с одного места, то в этом случае задача решается так:

1) $850 - 700 = 150$ (м/мин) – скорость удаления лисы от собаки.

2) $150 \cdot 7 = 1050$ (м) – расстояние, на которое удалится лиса через 7 минут.

А теперь, учитывая, что лиса первоначально имела дополнительное «запасное» расстояние в 400 м от собаки, достаточно просто его прибавить к найденному расстоянию:

3) $1050 + 400 = 1450$ (м) – искомое расстояние.

Ответ: 1450 м.

Движение по реке.

При решении задач на движение по реке помогают знания из жизненного опыта:

Озеро (море) – стоячая вода, поэтому при движении она не помогает, но и не препятствует движению катера (или другого объекта). Очевидно, что катер движется с той скоростью, которая называется собственной скоростью катера (скоростью, обусловленной мощностью его двигателя).

$$V_{\text{катера}} = V_{\text{собств}}$$

При движении по течению реки (часто говорят – «вниз» по реке) скорость катера увеличивается, т.к. движущаяся вода как бы «подталкивает», т.е. убыстряет его движение. В этом случае к собственной скорости катера необходимо прибавить скорость течения реки.

$$V_{\text{катера}} = V_{\text{собств}} + V_{\text{теч.реки}}$$

При движении против течения реки («вверх» по реке) скорость катера уменьшается, т.к. река замедляет его движение, «сносит» катер. В этом случае от собственной скорости катера следует вычесть скорость течения реки.

$$V_{\text{катера}} = V_{\text{собств}} - V_{\text{теч.реки}}$$

Задача 9. Турист проплыл на лодке по течению реки за 2 ч 24 км, а против течения он проплыл 8 км за 1 ч. Найдите скорость течения реки и собственную скорость лодки.

Решение. Из условия задачи видно, что $V_{пр.теч} = 8$ км/ч, а $V_{по.теч} = 12$ км/ч ($24 : 2 = 12$).

Удобно решить задачу с помощью уравнения.

Примем скорость течения реки за x км/ч.

С одной стороны $V_{собств} = V_{по.теч} - V_{теч}$ (т.е. чтобы найти собственную скорость лодки, нужно от скорости лодки по течению вычесть скорость течения реки). Это значит, что $V_{собств} = (12 - x)$ км/ч (1);

С другой стороны, $V_{собств} = V_{пр.теч} + V_{теч}$ (т.е. чтобы найти собственную скорость лодки, нужно к скорости лодки против течения прибавить скорость течения реки), т.е. $V_{собств} = (8 + x)$ км/ч(2).

Приравняв правые части равенств (1) и (2), получаем уравнение $12 - x = 8 + x$.

Решаем его:

$$x + x = 12 - 8.$$

$$x = 2 \text{ (км/ч) – искомая скорость течения реки.}$$

Вычислим собственную скорость лодки. Для этого можно воспользоваться как равенством (1), так и равенством (2). К примеру:

$$12 - x = 12 - 2 = 10 \text{ (км/ч) – собственная скорость лодки.}$$

Ответ: 2 км/ч; 10 км/ч.

Выведем две формулы, которые полезно знать:

1) формулу для нахождения собственной скорости, если известны скорость по течению и скорость против течения.

$$V_{по.теч} = V_{собств} + V_{теч} \text{ (1).}$$

$$V_{пр.теч} = V_{собств} - V_{теч} \text{ (2).}$$

Сложим (1) и (2), получим: $V_{по.теч} + V_{пр.теч} = 2V_{собств}$ откуда имеем:

$$V_{собств} = \frac{V_{по.теч} + V_{пр.теч}}{2} \text{ (3).}$$

2) формулу для нахождения скорости течения реки по тем же известным величинам. Вычтем (2) из (1), получим:

$$V_{по.теч} - V_{пр.теч} = 2V_{теч}, \text{ откуда получаем:}$$

$$V_{теч} = \frac{V_{по.теч} - V_{пр.теч}}{2} \quad (4).$$

Итак, при решении задач по теме «Движение по реке» необходимо знать следующие формулы:

$$1) V_{по.теч} = V_{собств} + V_{теч};$$

$$2) V_{пр.теч} = V_{собств} - V_{теч};$$

$$3) V_{собств} = \frac{V_{по.теч} + V_{пр.теч}}{2};$$

$$4) V_{теч} = \frac{V_{по.теч} - V_{пр.теч}}{2}.$$

Рассмотрим решение более сложных задач на движение.

Задача 10.

Два катера отходят одновременно от пристани А к пристани В, расстояние до которой 100 км. Проходя в час на 3 км больше второго катера, первый катер через 4 ч пути был вдвое ближе к пристани В, чем второй катер. Найти скорость каждого катера.

Решение.

Изобразим графически условие задачи (рис.6).

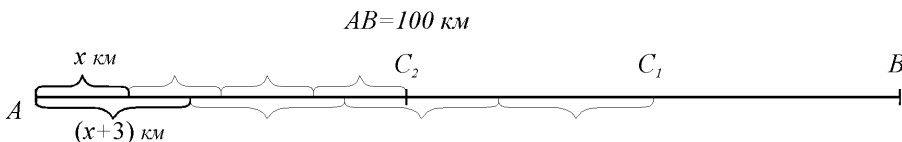


Рис. 6

Так как расстояние между пристанями А и В равно 100км, то первому катеру до пристани В осталось пройти $(100 - 4(x + 3))$ км (отрезок C_1B на рис.1), а второму осталось пройти $(100 - 4x)$ км (отрезок C_2B на рис.1). Согласно условию задачи ($C_2B = 2C_1B$) имеем уравнение: $100 - 4x = 2(100 - 4(x + 3))$, решением которого является $x = 19$.

Итак, 19км/ч – скорость второго катера и 22км/ч – скорость первого.

Проверка:

1) $22 \cdot 4 = 88$ (км) – расстояние, пройденное первым катером;

2) $19 \cdot 4 = 76$ (км) – расстояние, пройденное вторым катером;

До пристани В осталось пройти:

3) $100-88=12$ (км) – первому катеру;

4) $100-76=24$ (км) – второму катеру.

5) $24:12=2$ (раза).

Действительно, первый катер вдвое ближе к пристани В, чем второй.

Задача решена верно.

Ответ: 22км/ч, 19км/ч.

Задача 11.

Крокодил Гена едет в поезде, скорость которого 60км/ч, и видит, как в течение 3 секунд мимо его окна в противоположном направлении проходит поезд, имеющий длину 120метров. С какой скоростью прошёл встречный поезд?

Решение.

$$V_{сбл} = \frac{S}{t}; V_{сбл} = \frac{120}{3} = 40 \text{ (м/с)}.$$

Выразим $V_{сбл}$ в км/ч.

$$\text{Так как } 1\text{км} = 1000\text{м}, \text{ то } 1\text{м} = \frac{1}{1000} \text{ км}.$$

$$\text{Так как } 1\text{ч} = 60 \text{ мин} = 3600\text{сек}, \text{ то } 1\text{сек} = \frac{1}{3600} \text{ ч}.$$

$$40\text{м/сек} = \frac{40\text{м}}{1\text{сек}} = \frac{40 \cdot 1\text{м}}{1\text{сек}} = \frac{40 \cdot \frac{1}{1000} \text{ км}}{\frac{1}{3600} \text{ ч}} = \frac{40 \cdot 3600\text{км}}{1000\text{ч}} = 144\text{км/ч}.$$

Так как $V_{сбл} = V_1 + V_2$, то $V_2 = V_{сбл} - V_1 = 144 - 60 = 84$ (км/ч).

Ответ: 84км/ч.

Задача 12.

Полина и ее брат Егор одновременно вышли из дома в школу. Полина половину всего времени шла со скоростью 5 км/ч, а вторую половину времени – со скоростью 4 км/ч. Егор прошел половину всего пути со скоростью 4 км/ч, а вторую – со скоростью 5 км/ч. Кто из них раньше пришел в школу?

Решение.

Пусть Полина затратила на всю дорогу t_1 ч, а Егор – t_2 ч. Тогда Полина прошла $\frac{1}{2}t_1$ ч со скоростью 5 км/ч и $\frac{1}{2}t_1$ ч со скоростью 4 км/ч, пройдя весь путь S . Имеем уравнение:

$$5 \cdot \frac{1}{2}t_1 + 4 \cdot \frac{1}{2}t_1 = S, \text{ откуда } t_1 = \frac{2}{9}S.$$

Егор прошел $\frac{1}{2}S$ км со скоростью 4 км/ч, затратив $\frac{\frac{1}{2}S}{4}$ ч и $\frac{1}{2}S$ км со скоростью 5 км/ч, затратив $\frac{\frac{1}{2}S}{5}$ ч. Следовательно, Егор затратил

$$\text{всего } t_2 = \frac{\frac{1}{2}S}{4} + \frac{\frac{1}{2}S}{5} = \frac{S}{8} + \frac{S}{10} = \frac{9S}{40}.$$

Теперь необходимо сравнить t_1 и t_2 . Приведем соответствующие дроби к наименьшему общему знаменателю, получим:

$$t_1 = \frac{80}{360}S \text{ ч, } t_2 = \frac{81}{360}S \text{ ч.}$$

Очевидно, что $t_1 < t_2$, следовательно, Полина пришла в школу раньше Егора.

Ответ: Полина.

Средняя скорость вычисляется по формуле $V_{\text{сред}} = \frac{S}{t}$, где S - весь пройденный путь, t - всё время движения.

Например, если весь путь состоит из трёх участков, на которых скорость движения была различной, то среднюю скорость нужно определять по формуле $V_{\text{сред}} = \frac{S}{t} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{t_1 + t_2 + t_3}$.

Рассмотрим решение следующей задачи с применением понятия средней скорости.

Задача 13.

Катер шел со скоростью 24 км/ч. Когда ему осталось пройти на 12 км меньше, чем он уже преодолел, он стал двигаться со скоростью 16 км/ч. Какое расстояние прошел катер, если его средняя скорость на всем пути оказалась равной 20 км/ч?

Решение.

Пусть x км катер прошел со скоростью 24 км/ч, тогда $(x - 12)$ км он прошел со скоростью 16 км/ч. Весь путь равен $x + (x - 12) = 2x - 12$ (км), а время, затраченное на весь путь, равно $\left(\frac{x}{24} + \frac{x - 12}{16}\right)$ (ч).

Т.к. $V_{cp} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2}$, то имеем уравнение: $\frac{2x - 12}{\frac{x}{24} + \frac{x - 12}{16}} = 20$.

Решим его: $\frac{2x - 12}{5x - 36} = 20$, $(2x - 12) \cdot 48 = (5x - 36) \cdot 20$, корнем

последнего уравнения является $x = 36$.

Получили, что 36 км катер прошел со скоростью 24 км/ч и 24 км катер прошел со скоростью 16 км/ч. Весь путь составляет 60 км.

Проверка:

- 1) $36 : 24 = 1,5$ (ч) – t_1 .
- 2) $24 : 16 = 1,5$ (ч) – t_2 .
- 3) $1,5 + 1,5 = 3$ (ч) – общее время.
- 4) $60 : 3 = 20$ (км/ч) – средняя скорость.

Полученная средняя скорость совпадает с соответствующей скоростью по условию задачи.

Ответ: 60 км.

Задача 14.

Турист преодолел путь в 78 км за 10 ч, причем $\frac{2}{5}$ всего времени он прошел пешком, а остальную часть ехал на велосипеде. С какой скоростью шел турист, если на велосипеде он двигался со скоростью на 50% большей, чем шел пешком?

Решение.

Пусть турист двигался пешком со скоростью x км/ч, а на велосипеде – со скоростью $1,5x$ км/ч (на 50% большей). Пешком он затратил время $\frac{2}{5} \cdot 10 = 4$ (ч), пройдя $4x$ км, а на велосипеде он проехал $6 \cdot 1,5x = 9x$ (км). Имеем уравнение: $4x + 9x = 78$, откуда $x = 6$.
Ответ: 6 км/ч.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Два теплохода отправились от двух пристаней навстречу друг другу одновременно. Один из них шел до встречи 3 ч со скоростью 36 км/ч. Другой теплоход прошел до встречи третью часть пути, пройденного первым. Найти скорость второго теплохода и расстояние между пристанями.

Задача 2. Винни-Пух собирается пойти навстречу своему другу Пятачку, который тоже собирается идти к нему в гости. Расстояние между их домами 840 метров. Винни-Пух идет со скоростью 42 м/мин, а Пятачок – 63 м/мин. а) Через сколько минут они встретятся, если выйдут одновременно? б) Через сколько минут после выхода из дома Винни-Пух встретит Пятачка, если Винни-Пух выйдет на 5 минут раньше него? в) На сколько минут раньше нужно выйти Винни-Пуху из своего дома, чтобы застать Пятачка дома?

Задача 3. Два самолета вылетели одновременно с аэродрома в противоположных направлениях. Через 20 мин после вылета расстояние между ними было 540 км. Первый летел со скоростью 900 км/ч. С какой скоростью летел второй самолет?

Задача 4. Лодка плыла 2 часа по течению реки и 3 часа против течения, пройдя за это время 36 км. Скорость лодки против течения реки в 3 раза меньше, чем скорость лодки по течению. Чему равна собственная скорость лодки и скорость течения реки?

Задача 5. Расстояние между городами, расположенными на берегах одной и той же реки, равно 720 км. Теплоход, двигаясь по течению,

преодолевают это расстояние за 36 ч, а двигаясь против течения – за 45 ч. Найдите собственную скорость теплохода.

Задача 6. Черепаха ползла к реке 4 часа, причем каждый следующий час она проползала вдвое меньшее расстояние, чем в предыдущий час. Какое расстояние она проползла за второй час, если всего она преодолела 120 метров? Сколько метров в минуту (в среднем) преодолевала черепаха?

Задача 7. Сыщики побежали вдогонку за Фунтиком, когда он находился от них в 100 м. Догонят ли они Фунтика, если сыщики бегут со скоростью 180 м/мин, а Фунтик – 140 м/мин? Фунтику, чтобы спрятаться, нужно пробежать 280 м.

Задача 8. Две группы туристов должны идти навстречу друг другу из турбаз А и В, расстояние между которыми 30 км. Если первая группа выйдет на 2 ч раньше второй и будет идти со скоростью 5 км/ч, то они встретятся через 2,5 ч после выхода второй группы. С какой скоростью идет вторая группа? Через сколько часов произойдет их встреча, если они выйдут из турбаз А и В одновременно?

Задача 9. Выполняя задание северного завоза продуктов грузовое судно отправилось в 8 ч утра по реке из пункта А в пункт В, расположенный ниже по течению реки на 36 км. Пройдя 25% пути, капитан получил радиограмму вернуться назад и забрать срочный груз. Во сколько часов судно вернулось в порт, если собственная скорость судна равна 15 км/ч, и известно, что плоты сплавляются от А до В за 12 ч?

Задача 10. Алдар Косе и Ходжа Насреддин выехали на ишаках к султану на конкурс мудрецов по одной и той же дороге в одном и том же направлении. Алдар Косе находится на 8 км впереди Ходжи Насреддина и едет со скоростью 4 км/ч. Скорость Ходжи Насреддина 6 км/ч. У него есть собака, которая именно в тот момент, когда мы начали наблюдать за ними, побежала от своего хозяина к Алдару Косе (ее скорость 15 км/ч). Затем она вернулась к хозяину и опять побежала

к Алдару Косе. Так она бегала от одного к другому до тех пор, пока мудрецы не встретились. Какой путь пробежала собака?

Задача 11. Турист проплыл по реке на лодке 90 км, а затем прошел пешком 10 км. При этом на путь по реке было затрачено 6 ч, а на пеший путь – $\frac{2}{3}$ этого времени. Сколько километров смогли бы преодолеть туристы всего, если бы пешком прошли столько же времени, сколько плыли по реке, а по реке плыли столько времени, сколько шли пешком и скорости их передвижения увеличились бы на 20%?

Задача 12. Первую половину пути мотоциклист проехал со скоростью 30 км/ч, вторую – со скоростью 60 км/ч. Какова его средняя скорость?

Задача 13. Первый час автомобилист ехал со скоростью 50 км/ч и рассчитал, что если он и дальше будет ехать с той же скоростью, то опоздает в город на полчаса. Тогда он увеличил скорость на 20% и прибыл в город вовремя. Какой путь проехал автомобилист и сколько времени он находился в пути?

Задача 14. Могут ли три человека, имея двухместный мотоцикл, преодолеть расстояние в 60 км за 3 часа, если скорость мотоцикла 50 км/ч, а пешехода 5 км/ч?

Задача 15. Волк, проезжая в вагоне трамвая, заметил знакомого Зайца, шедшего вдоль трамвайной линии в противоположном направлении. Спустя 10 сек Волк вышел из трамвая и отправился догонять Зайца, идя вдвое быстрее его и в пять раз медленнее трамвая. Определить, через какое время он догонит Зайца?